

УДК 519.876.5; 621.313.33

В. Лишук, канд. техн. наук; Й. Селепина, канд. техн. наук

Луцький національний технічний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ РЕЖИМІВ ГЛИБОКОПАЗНИХ АСИНХРОННИХ ДВИГУНІВ

Резюме. Розглянуто математичну модель динамічної системи, що складається з вузла електричного навантаження глибокопазних асинхронних двигунів. Диференціальні рівняння електротехнічних пристроїв записані в нормальній формі Коші, що дуже зручно під час інтегрування диференціальних рівнянь явними методами.

Показано, що така модель є найефективнішою для аналізу перехідних процесів типової електромеханічної системи. Наведено результати математичного моделювання та побудовано основні електромеханічні залежності, що характеризують процес роботи системи при пуску, вибігу та подальшому розгоні машин. Такі режими часто виникають на виробництві, тому їх аналіз є невід'ємною частиною під час експлуатації та проектування таких систем.

Ключові слова: математична модель, електромеханічна система, диференціальні рівняння.

V. Lyshuk, J. Selepyna

MATHEMATICAL MODELING OF DYNAMIC REGIMES OF DEEP GROOVE ASYNCHRONOUS MOTORS

Summary. This paper deals with a problem of mathematical simulation of transient dynamic processes in electromechanical devices and systems with distributed parameters. Mathematical model of a dynamic system which consists of electrical load node of deep-groove asynchronous motors is examined. Differential equations of electrical engineering devices are written in the normal Cauchy's form that is very useful when integrating them by explicit methods.

Such model is shown to be the most effective for the analysis of transition process of a typical electromechanical system. Results of mathematical modeling are presented and the main electromechanical dependences which specify the system when machine starts, overruns and accelerates, are built. Such modes often appear in production, that's why their analysis is an integral part during operation and design of these systems.

The combining of the theory of electromagnetic circles and the theory of electromagnetic field gives sufficient advantages in solution of complicated problems of theoretical electrical engineering. Such approach enables to describe complicated physical processes in the above mentioned devices, viz. magnetic circuit saturation, skin-effect in current circuits, mechanical rotary motion of magnetic circuits. Unlike traditional models, they represent the system of differential equations in the normal Cauchy's form, which eliminates the operation of numerical rotation of matrix of coefficients at each step of integration.

Problem of transient dynamic regimes of electromechanical systems and devices at disconnection of its elements accompanied by amperage steps in their windings is solved on the ground of generalized laws of commutation for electric circuits. It is owing to this the problem of stiffness of differential equations had been eliminated. The application of explicit numerical methods simplified their integration sufficiently.

Key words: mathematical model, electromechanical system, differential equations.

Постановка проблеми. Перспективним напрямом розвитку математичного моделювання в задачах електромеханіки є розрахунок перехідних процесів у динамічних системах. На відміну від традиційних математичних моделей електротехнічних пристроїв (трансформаторів, двигунів) розроблено математичну модель динамічної системи, що оперує диференціальними рівняннями, записаними у нормальній формі Коші. Це є необхідною умовою при аналізі довготривалих перехідних процесів, що мають місце на практиці. Використано метод вузлових напруг, який адаптовано в часову область. З іншого ж боку, комп'ютерна реалізація

традиційних моделей ускладнена через процедуру обертання матриці коефіцієнтів на кожному часовому кроці інтегрування, а також віднімання двох близьких за значенням величин основного й робочого потокозчеплень [1], що неминуче призводить до накопичення похибок і робить неможливим подальший аналіз перехідних процесів.

Аналіз наукових досліджень і публікацій. У наш час багато вчених займаються проблемами математичного моделювання електромеханічних систем. Важливе значення при побудові математичних моделей мають роботи Ю.М. Васьковського, І.П. Копилова, О.М. Олейникова, В.Ф. Сивокобиленка, А.В. Чабана та ін. Однак питання математичного моделювання перехідних процесів у системах зі змінною структурою, зокрема вузла навантаження з глибокопазними асинхронними двигунами недостатньо розкриті. Однією з типових задач електромеханіки є розрахунок режимів самозапуску електричних машин [1,2,3]. Тому в роботі змодельовано пуск, вибіг та самозапуск асинхронних двигунів.

Постановка задачі. В статті моделюється електромеханічна система, яка складається з трифазного силового трансформатора, що живить чотири глибокопазні двигуни. Розрахункова система умовно зображена на рис.1, де електричне коло містить один груповий вузол.

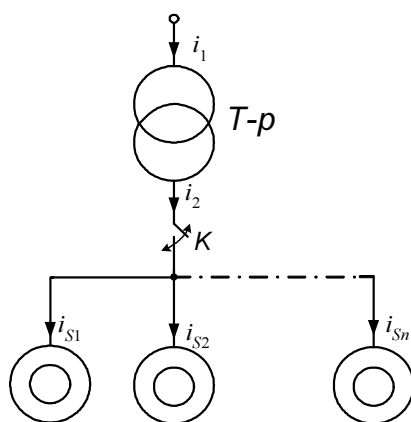


Рисунок 1. Структурна схема електромеханічної системи

Figure 1. Block diagram of an electromechanical system

Для розв'язання цієї задачі користуємося A -моделлю в косокутних координатах [4]. Диференціальні рівняння системи трансформатора (1) та двигунів (2) запишемо в нормальній формі Коші

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} &= A_1(U_m - R_1 I_1) + A_{12}(U_2 - R_2 I_2); \\ \frac{dI_2}{dt} &= A_{21}(U_m - R_1 I_1) + A_2(U_2 - R_2 I_2). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI_S}{dt} &= A_S(U_2 - R_S I_S) + A_{SR}(-V_R + \Omega_R \Psi_R - R_R I_R); \\ \frac{di_R}{dt} &= A_{RS}(U_2 - R_S I_S) + A_R(-V_R + \Omega_R \Psi_R - R_R I_R) \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

де U_m – колонка напруг мережі; U_2 – колонка напруг вузла навантаження; $i_1 = (i_{1A}, i_{1B})_t$, $i_2 = (i_{2A}, i_{2B})_t$, $i_S = (i_{SA}, i_{SB})_t$, $i_R = (i_{RA}, i_{RB})_t$ – колонки фазних струмів обмоток трансформатора, статора й перетворених струмів ротора двигуна; A_1, A_2, A_{12}, A_{21} – матриці коефіцієнтів трансформатора

$$A_T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_T + \alpha_1 + \alpha'_2} \begin{bmatrix} \alpha_1(\alpha'_2 + \alpha_T) & 0 & -\alpha_1\alpha'_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1(\alpha'_2 + \alpha_T) & 0 & -\alpha_1\alpha'_2 \\ -\alpha_1\alpha'_2 & 0 & \alpha'_2(\alpha_1 + \alpha_T) & 0 \\ 0 & -\alpha_1\alpha'_2 & 0 & \alpha'_2(\alpha_1 + \alpha_T) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

R_1, R_2 – опори первинної та вторинної обмоток трансформатора; R_S, R_R – опори обмоток статорів та роторів двигунів; Ω – матриця кутових швидкостей роторів двигунів [5]

$$\Omega_R = \frac{\omega}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

V_R – напруга пазової частин провідника, яку знаходимо з рівнянь електромагнітного поля. Для n -моторів їх матриці A_S, A_R, A_{RS}, A_{SR} будуть поверхневими (кубічними)

$$A_{Si} = \alpha_{Si}(1 - \alpha_{Si}G_i); \quad A_{SRi} = A_{RSi} = -\alpha_{Si}\alpha_{Ri}G_i; \quad A_{Ri} = \alpha_{Ri}(1 - \alpha_{Ri}G_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

де G_i – матриці моторів.

$$G = \begin{bmatrix} T + b_A I_A & b_B I_A \\ b_A I_B & T + b_B I_B \end{bmatrix}, \quad (6)$$

де R, T, b, b_A, b_B – коефіцієнти

$$R = \frac{1}{\alpha_S + \alpha_R + \rho}; \quad T = \frac{1}{\alpha_S + \alpha_R + \tau}; \quad b = \frac{R - T}{I_m^2}; \quad b_A = \frac{2}{3}b(2I_A + I_B), \quad b_B = \frac{2}{3}b(I_A + 2I_B). \quad (7)$$

Для врахування насичення магнітопроводів двигунів користуємось їхніми характеристиками намагнічування $\psi_m = \psi_m(I_m)$. Для двигуна А12-52-8А

$$\psi_m = \begin{cases} 0,8182I_m, & \text{якщо } I_m \leq 11, \\ 9 + 0,8182 \cdot k + 0,064 \cdot k^2 + 0,000147 \cdot k^3, & \text{якщо } 11 < I_m < 40, \\ 0,2375I_m + 23,19, & \text{якщо } I_m \geq 40, \end{cases} \quad \text{де } k = I_m - 11. \quad (8)$$

Залежно від струму намагнічування, отримаємо:

$$\tau = \left[\frac{\psi_m(I_m)}{I_m} \right]^{-1}, \quad (9)$$

$$\rho = \left[\frac{d\psi_m(I_m)}{dI_m} \right]^{-1}, \quad (10)$$

де τ і ρ – основні обернені статична та диференціальна індуктивності двигуна.

Модуль вектора намагнічувальних струмів I_m знаходимо за формулою

$$I_m = 2\sqrt{\frac{I_A^2 + I_A I_B + I_B^2}{3}}, \quad (11)$$

де

$$I_A = I_{SA} + I_{RA}; \quad I_B = I_{SB} + I_{RB}. \quad (12)$$

Сформуємо матрицю коефіцієнтів A моторів. У випадку, коли магнітопроводи моторів є ненасиченими $\rho = \tau = \alpha_m$, то матриці (5) спрощуються й набувають вигляду

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \alpha_S - \frac{\alpha_S^2}{\alpha_S + \alpha_R + \alpha_m} & 0 & -\frac{\alpha_S \cdot \alpha_R}{\alpha_S + \alpha_R + \alpha_m} & 0 \\ \hline 0 & \alpha_S - \frac{\alpha_S^2}{\alpha_S + \alpha_R + \alpha_m} & 0 & -\frac{\alpha_S \cdot \alpha_R}{\alpha_S + \alpha_R + \alpha_m} \\ \hline -\frac{\alpha_S \cdot \alpha_R}{\alpha_S + \alpha_R + \alpha_m} & 0 & \alpha_R - \frac{\alpha_R^2}{\alpha_S + \alpha_R + \alpha_m} & 0 \\ \hline 0 & -\frac{\alpha_S \cdot \alpha_R}{\alpha_S + \alpha_R + \alpha_m} & 0 & \alpha_R - \frac{\alpha_R^2}{\alpha_S + \alpha_R + \alpha_m} \\ \hline \end{array}. \quad (13)$$

Таким чином, отримано найпростішу математичну модель асинхронного двигуна. Слід зауважити, що насичення магнітної системи урахується не часто. Воно стосується таких режимів, як динамічне, конденсаторне гальмування, перенапруги тощо. До рівнянь електромагнітного стану асинхронної машини слід додати рівняння механічного руху ротора

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p_0}{J}(M_E - M_{\text{мех}}); \quad \frac{d\gamma}{dt} = \omega, \quad (14)$$

де p_0 – число пар магнітних полюсів машини; J – момент інерції ротора; M_E – електромагнітний момент; $M_{\text{мех}}$ – механічний момент; γ – кут повороту ротора в електричних радіанах.

Вираз для моменту M_E має вигляд [5]

$$M_E = \sqrt{3} p_0 (I_{RA} I_{SB} - I_{RB} I_{SA}) / \tau. \quad (15)$$

Колонка повних поточкозчеплень обмотки ротора $\Psi_R = (\Psi_{RA}, \Psi_{RA})_t$ має вигляд

$$\Psi_{Rj} = \frac{I_j}{\tau} + \frac{I_{Rj}}{\alpha_R}; \quad j = A, B. \quad (16)$$

Запишемо структурні рівняння схеми (рис.1) на підставі законів Кірхгофа

$$I_2 + \sum_{i=1}^n I_{Si} = 0, \quad U_2 = U_{Si} = V, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Диференціюючи перший вираз (17), отримаємо

$$\frac{dI_2}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{dI_{Si}}{dt} = 0. \quad (18)$$

Задача полягає у знаходженні напруг V_A , V_B у перехідних процесах, що є фазними напругами вузла навантаження. Як бачимо з (17), електрично пов'язані тільки вторинна обмотка трансформатора та статорні обмотки двигунів. Підставимо рівняння (1), (2) у рівняння (18)

$$A_{21}(U_m - R_1 I_1) + A_2(V - R_2 I_2) + \sum_{i=1}^n A_{Si}(V - R_{Si} I_{Si}) + \sum_{i=1}^n A_{SRi}(-V_{Ri} + \Omega \Psi_{Ri} - R_{Ri} I_{Ri}) = 0. \quad (19)$$

Надамо виразу (17) вигляду

$$\left(A_2 + \sum_{i=1}^n A_{Si} \right) V = -A_{21}(U_m - R_1 I_1) + A_2 R_2 I_2 + \sum_{i=1}^n A_{Si} R_{Si} I_{Si} - \sum_{i=1}^n A_{SRi}(-V_{Ri} + \Omega \Psi_{Ri} - R_{Ri} I_{Ri}). \quad (20)$$

Розв'язуючи рівняння (20) стосовно невідомих напруг вузла, отримаємо

$$V = M^{-1} \cdot \left[-A_{21}(U_m - R_1 I_1) + A_2 R_2 I_2 + \sum_{i=1}^n A_{Si} R_{Si} I_{Si} - \sum_{i=1}^n A_{SRi}(-V_{Ri} + \Omega \Psi_{Ri} - R_{Ri} I_{Ri}) \right], \quad (21)$$

де M^{-1} – обернена матриця до матриці M розміром (2x2)

$$M = A_2 + \sum_{i=1}^n A_{Si}. \quad (22)$$

Запишемо остаточно рівняння (22) у матричному вигляді

$$\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = M^{-1} \cdot \left[- \begin{bmatrix} a_{t31} & a_{t32} \\ a_{t41} & a_{t42} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} U_m \sin \omega t \\ U_m \sin(\omega t - 2\pi/3) \end{bmatrix} - R_1 \cdot \begin{bmatrix} I_{1A} \\ I_{1B} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a_{t33} & a_{t34} \\ a_{t43} & a_{t44} \end{bmatrix} \cdot R_2 \begin{bmatrix} I_{2A} \\ I_{2B} \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} a_{11i} & a_{12i} \\ a_{21i} & a_{22i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{SAi} \\ R_{SBi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{SAi} \\ I_{SBi} \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} a_{13i} & a_{14i} \\ a_{23i} & a_{24i} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -V_{RAi} \\ -V_{RBi} \end{bmatrix} + \frac{\omega}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi_{RAi} \\ \Psi_{RBi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{RAi} \\ R_{RBi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{RAi} \\ I_{RBi} \end{bmatrix} \right) \right]. \quad (23)$$

Рівняння електромагнітного поля. Досліджувані двигуни мають прямокутний глибокий профіль паза. За таких умов маємо одновимірну просторову задачу електродинаміки. Векторні рівняння квазістаціонарного електромагнітного поля у такому разі набувають вигляду [5]

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\nu}{\gamma} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}; \quad E = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial H}{\partial z}, \quad (24)$$

де H – напруженість магнітного поля; E – напруженість електричного поля; γ , ν – електропровідність і релактивність (обернена магнітна проникність) провідника; z – просторова координата в напрямку глибини паза.

Здійснивши координатні перетворення рівняння (24), отримаємо [5]

$$\frac{\partial H_A}{\partial t} = \frac{\nu}{\gamma} \frac{\partial^2 H_A}{\partial z^2} - \frac{\omega}{\sqrt{3}}(H_A + 2H_B); \quad \frac{\partial H_B}{\partial t} = \frac{\nu}{\gamma} \frac{\partial^2 H_B}{\partial z^2} - \frac{\omega}{\sqrt{3}}(H_B + 2H_A). \quad (25)$$

Крайові умови знаходимо за законом повного струму

$$H_k(0) = i_{Rk} / a; \quad H_k(h) = 0, \quad k = A, B, \quad (26)$$

де a – ширина паза; h – глибина паза.

Дискретизуючи (25) за просторовою координатою z , отримаємо

$$\frac{dH_{Ai}}{dt} = \frac{v}{\gamma(\Delta z)^2} (H_{Ai-1} - 2H_{Ai} + H_{Ai+1}) - \frac{\omega}{\sqrt{3}} (H_{Ai} + 2H_{Bi}), \quad (27)$$

$$\frac{dH_{Bi}}{dt} = \frac{v}{\gamma(\Delta z)^2} (H_{Bi-1} - 2H_{Bi} + H_{Bi+1}) + \frac{\omega}{\sqrt{3}} (H_{Bi} + 2H_{Ai}), \quad i = 2, \dots, m-1, \quad (28)$$

де Δz – просторовий крок дискретизації; m – число вузлів просторової сітки.

Напругу на пазовій частині ротора знаходимо як $V_R = E(0) \cdot l$, де $E(0)$ – напруженість електричного поля на поверхні провідника; l – довжина паза. У дискретній формі матимемо:

$$V_{Ri} = \frac{l}{2\gamma\Delta z} (3H_{i1} - 4H_{i2} + H_{i3}), \quad i = A, B. \quad (29)$$

Комутації. Принцип збереження потокозчеплень дає змогу встановлювати зв'язок між докомутаційним і післякомутаційним процесами. Згідно з цим принципом стрибкоподібна зміна повних потокозчеплень можлива лише з того боку елемента, яким він під'єднаний до ефективного вузла індуктивностей. У процесі самозапуску поведінка асинхронної машини як елемента системи при заданих статичному моменті навантаження і сумарному моменті обертових мас визначається значенням напруги на загальних шинах, тобто напругами групового вузла. Стрибки струмів зумовлені некомпенсованими струмами в новоскомутуваному електричному колі. Якщо їх сума у вузлі для будь-якої фази дорівнює нулю, то в системі зберігається неперервність струмів і потокозчеплень окремих елементів.

Для ілюстрації узагальнених законів комутації розглянемо комутаційний процес у конкретній системі вибігу групи паралельно сполучених електричних машин, що живилися від спільного трансформатора.

Нехай у процесі групового вибігу бере участь n двигунів. Структурні рівняння згідно з рис.1 набувають вигляду

Рівняння до та після комутації мають вигляд

$$\sum_{k=1}^n I_{sk}^{(-0)} + I_2^{(-0)} = 0, \quad \sum_{k=1}^n I_{sk}^{(+0)} = 0, \quad (30)$$

де I_S – струм фази статора; I_2 – струм тієї ж фази вторинної обмотки трансформатора; $k = 1, \dots, n$ – кількість двигунів, під'єднаних до вузла.

Струми статорів і роторів двигунів виразимо формулами

$$I_S = \alpha_S (\Psi_S - \psi_S); \quad I_R = \alpha_R (\Psi_R - \psi_R). \quad (31)$$

Повні потокозчеплення статора і ротора знаходимо за формулою (16).

Запишемо рівновагу магніторухливих сил

$$\psi_j \cdot \alpha_m = I_{mj} = I_{Sj} + I_{Rj} = \alpha_S (\Psi_{Sj} - \psi_j) + \alpha_R (\Psi_{Rj} - \psi_j). \quad (32)$$

Із рівняння (32) визначимо робочі потокозчеплення

$$\psi_j = \frac{\alpha_S \Psi_{Sj} + \alpha_R \Psi_{Rj}}{\alpha_m + \alpha_R + \alpha_S} = (\alpha_S \Psi_{Sj} + \alpha_R \Psi_{Rj}) G. \quad (33)$$

Підставляючи (33) у (31), отримаємо вирази для знаходження струмів статора і ротора k -го двигуна після комутації

$$\left. \begin{aligned} I_{Sk}^{(+0)} &= \alpha_{Sk} \left((1 - \alpha_{Sk} \cdot G_k) \cdot \Psi_{Sk}^{(+0)} - \alpha_{Rk} \cdot G_k \cdot \Psi_{Rk}^{(-0)} \right); \\ I_{Rk}^{(+0)} &= \alpha_{Rk} \left(-\alpha_{Sk} \cdot G_k \cdot \Psi_{Sk}^{(+0)} + (1 - \alpha_{Rk} \cdot G_k) \cdot \Psi_{Rk}^{(-0)} \right). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Тоді перший закон Кірхгофа для k двигунів приймає вигляд

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{Sk} (1 - \alpha_{Sk} G_k) \Psi_{Sk}^{(+0)} = \sum_{k=1}^n \alpha_{Sk} \alpha_{Rk} G_k \Psi_{Rk}^{(+0)}. \quad (35)$$

Струми і потокозчеплення окремих машин у момент комутації зазнають стрибкоподібної зміни згідно з законом збереження потокозчеплень. Потокозчеплення ротора до комутації і після неї не змінюється, так як кола роторів окремих машин є електрично незв'язаними.

$$\Psi_{Rj}^{(+0)} = \Psi_{Rj}^{(-0)}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (36)$$

Потокозчеплення $\Psi_{Sj}^{(-0)}$ і $\Psi_{Rj}^{(-0)}$ відомі з попереднього до комутації стану.

Вибравши коло статора першого мотора в якості базисної сторони багатополюсника, запишемо вираз для знаходження потокозчеплення статора k -го мотора після комутації

$$\Psi_{Sk}^{(+0)} = \Psi_{S1}^{(+0)} - \Psi_{S1}^{(-0)} + \sum_{k=2}^n \Psi_{Sk}^{(-0)}. \quad (37)$$

Шукані функції при $t = +0$ будемо обчислювати, вважаючи, що елементи матриць G_k у момент комутації дорівнюють їх значенням при $t = -0$.

$$\left(\sum_{k=1}^n \alpha_{Sk} (1 - \alpha_{Sk} G_k) \right) \Psi_{S1}^{(+0)} - \sum_{k=2}^n \alpha_{Sk} (1 - \alpha_{Sk} G_k) \left(\Psi_{S1}^{(-0)} - \sum_{k=2}^n \Psi_{Sk}^{(-0)} \right) = \sum_{k=1}^n \alpha_{Sk} \alpha_{Rk} G_k \Psi_{Rk}^{(-0)}. \quad (38)$$

Введемо такі позначення:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{Sk} (1 - \alpha_{Sk} G_k) = D; \quad \sum_{k=1}^n \alpha_{Sk} \alpha_{Rk} G_k \Psi_{Rk}^{(-0)} = S; \quad \sum_{k=2}^n \alpha_{Sk} (1 - \alpha_{Sk} G_k) (\Psi_{S1}^{(-0)} - \Psi_{Sk}^{(-0)}) = Q. \quad (39)$$

Тоді формула (38) набуде такого вигляду

$$D\Psi_{S1}^{(+0)} = S + Q. \quad (40)$$

З рівняння (40) розраховуємо потокозчеплення обмотки статора першого мотора після комутації

$$\Psi_{S1}^{(+0)} = D^{-1} (S + Q). \quad (41)$$

Матриця D має розмірність (2×2) , матриця D^{-1} – обернена матриця до D .

Маючи значення $\Psi_{Rk}^{(+0)}$ і $\Psi_{Sk}^{(+0)}$, можемо згідно з (33) обчислити значення струмів статора і ротора при $t = +0$.

Підставляючи (41) в (40) і отриманий результат в (34), отримаємо

$$\left. \begin{aligned} I_{Sk}^{(+0)} &= \alpha_{Sk} \left[(1 - \alpha_{Sk} G_k) \left(D^{-1} (S + Q) - \Psi_{S1}^{(-0)} + \sum_{k=2}^n \Psi_{Sk}^{(-0)} \right) - \alpha_{Rk} G_k \Psi_{Rk}^{(-0)} \right]; \\ I_{Rk}^{(+0)} &= \alpha_{Rk} \left[-\alpha_{Sk} G_k \left(D^{-1} (S + Q) - \Psi_{S1}^{(-0)} + \sum_{k=2}^n \Psi_{Sk}^{(-0)} \right) + (1 - \alpha_{Rk} G_k) \Psi_{Rk}^{(-0)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Рівняння (42) необхідно доповнити ще одним рівнянням, урахувавши те, що кутова швидкість обертання роторів двигунів у момент комутації стрибком змінитися не може із-за механічної інерційності їх валів

$$\omega_k^{(-0)} = \omega_k^{(+0)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (43)$$

Математичне моделювання. Для розрахунку перехідного процесу використано професійну мову програмування *Visual FORTRAN*. Також використано пакет *GRAPHER* для ілюстрації одновимірних графічних залежностей.

Математична модель системи побудована для одного електротехнічного пристрою з нерухомими електричними та магнітними контурами (на прикладі трифазного силового трансформатора) та чотирьох електромеханічних пристроїв з рухомими масивними струмопроводами (чотири однотипних глибокопазних асинхронних двигунів), у яких різні моменти навантаження на валу.

Каталожні дані електромеханічної системи:

$U = 5150$ В – напруга мережі; $\omega = 314$ с⁻¹ – колова частота змінного струму; $\alpha_1 = \alpha_2 = 4000$ Гн⁻¹ – обернені індуктивності розсіяння первинної та вторинної обмоток; $R_1 = R_2 = 0,015$ Ом – опори первинної і вторинної обмоток трансформатора; $\alpha_2 = 40$ Гн⁻¹ – обернена основна індуктивність трансформатора; $R_S = 1,273$ Ом – опори статорних обмоток двигунів; $R_R = 0,21$ Ом – приведені опори роторних обмоток; $\alpha_S = 39$ Гн⁻¹ – обернені індуктивності розсіяння обмоток статорів; $\alpha_R = 70$ Гн⁻¹ – приведені обернені індуктивності розсіяння обмоток роторів; $\alpha_m = 1,16$ Гн⁻¹ – основні обернені

індуктивності розсіяння; $J = 64 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ – моменти інерції роторів; $p_0 = 4$ – кількість пар магнітних полюсів.

Розглядається пуск чотирьох однакових глибокопазних асинхронних двигунів з різними моментами навантаження на валах.

Двигуни виходять на усталену швидкість обертання, після чого в момент часу $t_{k1} = 2,51 \text{ с}$ імітується аварійний режим (зникнення напруги на шинах трансформатора), тобто відбувається вибіг двигунів, а в момент часу $t_{k2} = 3,51 \text{ с}$ двигуни отримують живлення і відбувається їх самозапуск. Перший та другий двигуни мають вентиляторний момент навантаження на валах

$$M_{\text{мех1}} = 2,257\omega_1 + 74 \cdot 10^{-6} \omega_1^3 - 21 \cdot 10^{-12} \omega_1^5 + 40,6 \text{ Нм};$$

$$M_{\text{мех2}} = 8,59\omega_2 + 116 \cdot 10^{-6} \omega_2^3 - 24 \cdot 10^{-11} \omega_2^5 + 81 \text{ Нм}.$$

Третій і четвертий двигуни мають активні моменти навантаження: $M_{\text{мех3}} = 3000 \text{ Нм}$, $M_{\text{мех4}} = 3800 \text{ Нм}$.

На рис.2 зображено кутові швидкості обертання двигунів. Моменти входження кожного електропривода на усталений процес відповідно становлять: $t_1 = 0,65 \text{ с}$, $t_2 = 0,8 \text{ с}$, $t_3 = 0,9 \text{ с}$, $t_4 = 1 \text{ с}$. Кутові швидкості відповідно дорівнюють: $\omega_1 = 307,7 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 302 \text{ с}^{-1}$, $\omega_3 = 307,5 \text{ с}^{-1}$, $\omega_4 = 305,5 \text{ с}^{-1}$. До моменту другої комутації кутові швидкості обертання двигунів становлять: $\omega_1 = 180 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 138 \text{ с}^{-1}$, $\omega_3 = 113 \text{ с}^{-1}$, $\omega_4 = 83 \text{ с}^{-1}$.

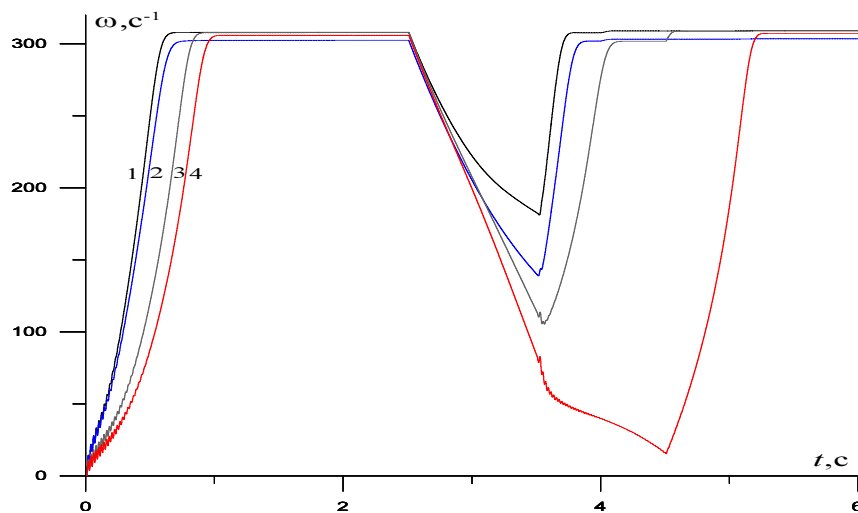


Рисунок 2. Кутові швидкості обертання чотирьох двигунів при їх пуску, груповому вибігу при $t_k = 2,51 \text{ с}$ і самозапуску при $t_k = 3,51 \text{ с}$

Figure 2. Angular velocity of four motors while starting group overrun with $t_k = 2,51 \text{ sec.}$ and self-starting at $t_k = 3,51 \text{ sec}$

Одночасно із самозапуском імітується накид навантаження на валах третього і четвертого двигунів до значення $M_3 = 6000 \text{ Нм}$, $M_4 = 8400 \text{ Нм}$. Навантаження третього двигуна збільшено і він розганяється відносно довше, ніж при пуску. Навантаження для четвертого двигуна є недопустимо великим і відбувається зрив його самозапуску. Кутова швидкість зменшується до значення $\omega_4 = 16 \text{ с}^{-1}$. У момент часу $t_{k3} = 4,5 \text{ с}$ навантаження на валах третього і четвертого двигунів зменшується і стає таким же, як і при пуску. На рисунку в цей момент часу помітно різкий розгон четвертого двигуна до номінальної швидкості обертання, а також збільшення кутової швидкості третього двигуна на 6 рад. Кутові швидкості обертання в усталеному процесі після повторного пуску становлять: $\omega_1 = 308 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 303 \text{ с}^{-1}$, $\omega_3 = 308 \text{ с}^{-1}$, $\omega_4 = 307 \text{ с}^{-1}$.

На рис.3–4 зображено перехідні фазні струми окремих елементів системи. Середній пусковий струм вторинної обмотки трансформатора становить $i_{2An} = 1320$ А. По мірі розгону двигунів при $t \approx 1$ с струм зменшується і в усталеному процесі становить $i_{2A} = 160$ А. Під час аварійного вимкнення трансформатора протягом часу $t \in (2,51 \div 3,61)$ с. струм трансформатора дорівнює нулю. Повторна подача напруги на шини трансформатора спричиняє появу пускових струмів в обмотках трансформатора і двигунів.

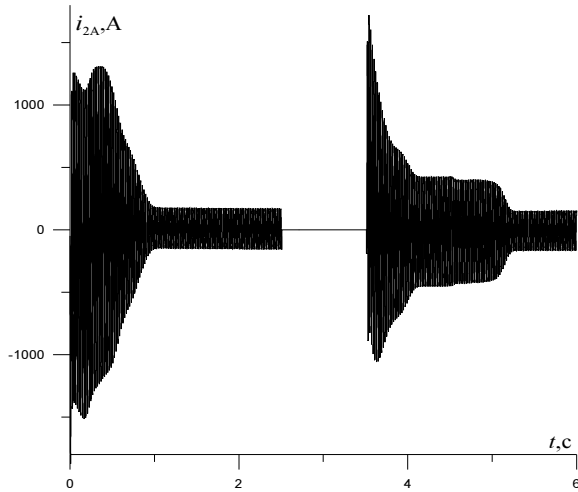


Рисунок 3. Струм фази А вторинної обмотки трансформатора в перехідному процесі

Figure 3. The A-phase current of transformer secondary winding in the transition process

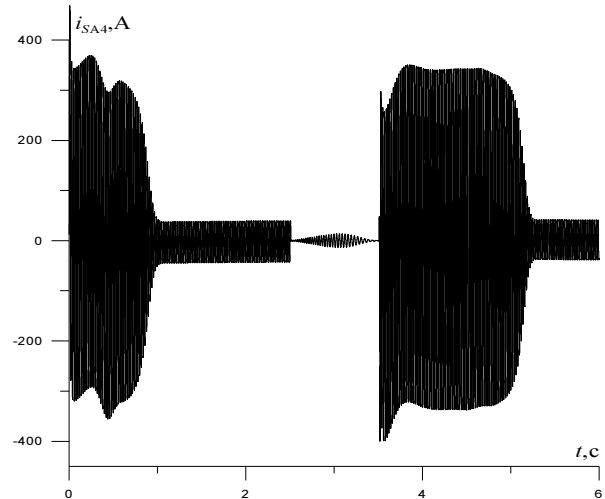


Рисунок 4. Перехідний струм фази А статора четвертого двигуна

Figure 4. The A-phase transient current of a stator of the fourth motor

На проміжку часу, коли перші три двигуни розігнались, а четвертий сповільнює свою кутову швидкість $t \in (4,1 \div 4,5)$ с. струм у трансформаторі становить $i_{2A} = 440$ А, що зумовлено збільшенням навантаження системи. Лише після зменшення статичного моменту на валу четвертого двигуна ($t = 4,5$ с) струм трансформатора зменшується до $i_{2A} = 415$ А. В повторному усталеному процесі струм трансформатора остаточно зменшується до значення $i_{2A} = 160$ А. Пускові струми двигунів: $i_{SA1n} = 360$ А, $i_{SA1n} = 380$ А, $i_{SA1n} = 370$ А, $i_{SA1n} = 360$ А. В усталеному процесі струми в статорних обмотках становлять: $i_{SA1} = 31$ А, $i_{SA1} = 59$ А, $i_{SA1} = 31$ А, $i_{SA1} = 39$ А.

На рис.5 зображено напругу фази А у вузлі навантаження.

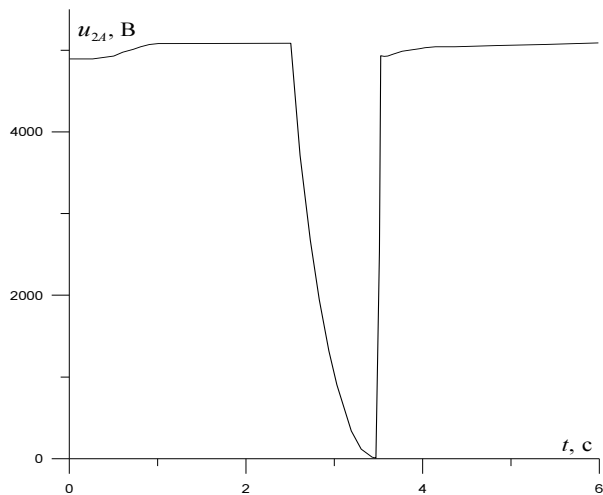


Рисунок 5а. Огибающая напряжения фазы A у вузлі навантаження

Figure 5a. Envelope of the phase A voltage in the load node

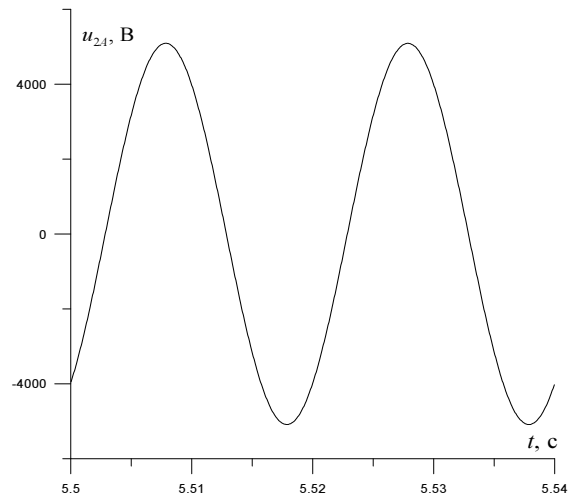


Рисунок 5б. Фазна напруга у вузлі в усталеному процесі на проміжку часу $t \in (5,5 \div 5,54 \text{ c})$

Figure 5b. Phase voltage in the mode in steady-state process during the time interval $t = (5,5 \div 5,54 \text{ sec.})$

Номінальне амплітудне значення фазної напруги вторинної обмотки трансформатора становить $u_{2A} = 5150 \text{ V}$. При пуску двигунів значення фазної напруги становить $u_{2A} = 4877 \text{ V}$. У моменті входження двигунів на усталений процес напруга піднімається ступінчасто і становить відповідно: при $t = 0,65 \text{ c}$ – $u_{2A} = 4990 \text{ V}$, при $t = 0,8 \text{ c}$ – $u_{2A} = 5040 \text{ V}$, при $t = 0,8 \text{ c}$ – $u_{2A} = 5070 \text{ V}$, при $t = 1,0 \text{ c}$ – $u_{2A} = 5077 \text{ V}$. В усталеному процесі напруга на шинах становить $u_{2A} = 5082 \text{ V}$.

На рис.5–6 зображено стрибки фазних струмів першого та четвертого двигунів моменти першої та другої комутацій у збільшеному масштабі.

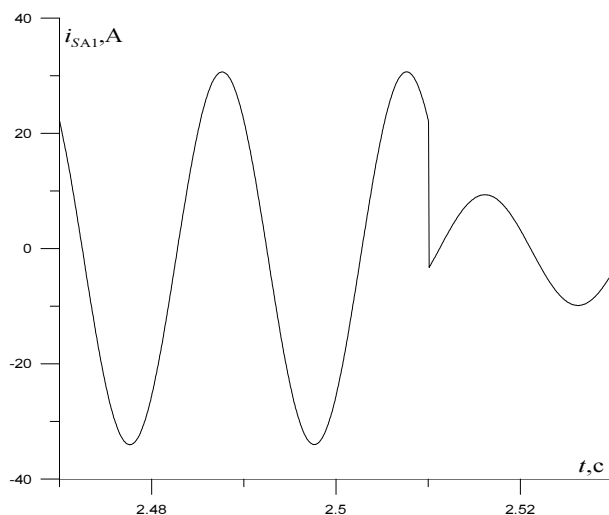


Рисунок 6. Стрибок струму статора першого мотора в момент часу $t_k = 2,51 \text{ c}$

Figure 6. Stator current jump of the first motor stator at time point $t_k = 2,51 \text{ sec}$

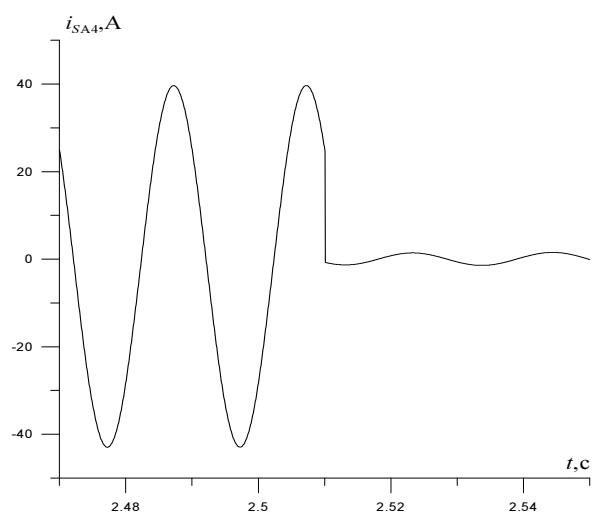


Рисунок 7. Стрибок струму статора четвертого мотора в момент часу $t_k = 2,51 \text{ c}$

Figure 7. Stator current jump of the fourth motor at time point $t_k = 2,51 \text{ sec}$

На рис.8–9 зображено електромагнітні моменти першого та четвертого двигунів. Середні пускові моменти їх становлять: $M_{П1} = 6100$ Нм, $M_{П2} = 7200$ Нм, $M_{П3} = 6000$ Нм, $M_{П4} = 7900$ Нм.

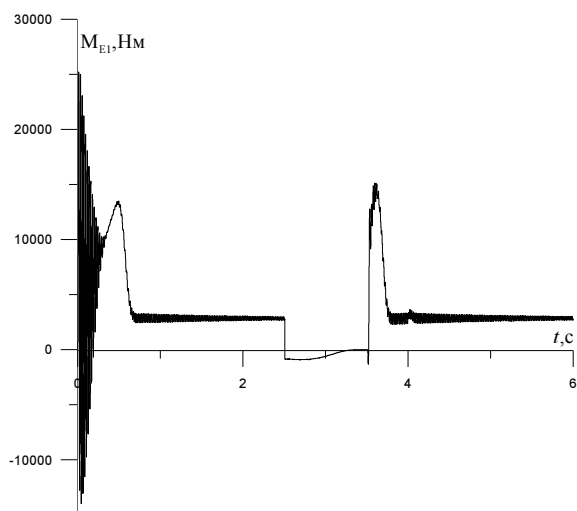


Рисунок 8. Електромагнітний момент першого двигуна

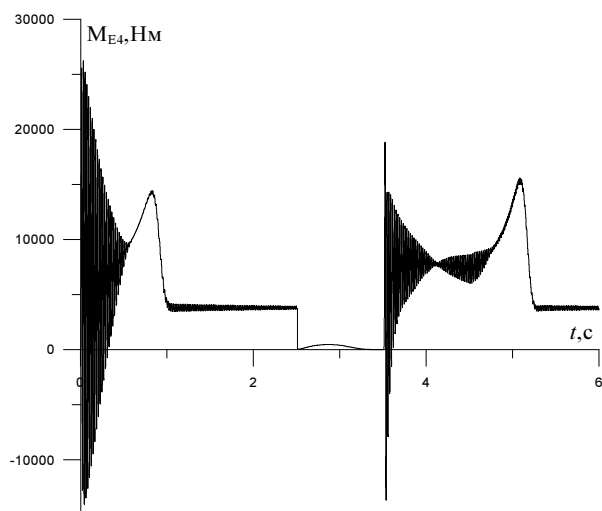


Рисунок 9. Електромагнітний момент четвертого двигуна

Figure 8. Electromagnetic moment of the first motor

Figure 9. Electromagnetic moment of the fourth motor

У процесі групового вибігу електромагнітні моменти зменшуються до нуля. При повторній подачі напруги на шини трансформатора на перших трьох двигунах спостерігаємо знову ж таки збільшення моментів до максимальних і подальше їх зменшення при входженні електроприводів в усталений процес.

Висновки. Практичні задачі розрахунку та аналізу перехідних процесів у вузлі навантаження асинхронних двигунів доцільно проводити тільки методами математичного моделювання, що дасть змогу правильно проектувати електротехнічні пристрої та електромеханічні системи. Як показали результати експерименту, розрахунок максимально наближається до реальних процесів в електромеханічних системах. Зважаючи на відносну простоту математичної моделі, вона максимально орієнтована на застосування в прикладних програмах персональних комп'ютерів з урахуванням реальної складності промислових електромеханічних систем. Прийняті вхідні допущення забезпечують високу точність числових розрахунків.

Conclusions. It is proposed to carry out practical problems of calculation and analysis of transient processes in the load node of asynchronous motors only by mathematical modeling. This allows to project electrical devices and electromechanical systems properly. The results of the experiment showed the closest approach of the calculation to real processes in electromechanical systems. Taking into account the complexity of real industrial electromechanical systems, a relatively simple mathematical model is maximally focused on the use in personal computer applications. Accepted incoming assumptions provide high precision of numerical calculations.

Список використаної літератури

1. Копылов, И.П. Математическое моделирование электрических машин [Текст] / И.П. Копылов. – М.: Высшая школа, 2001. – 327 с.
2. Сивокобыленко, В.Ф. Математическое моделирование глубокопазных асинхронных машин [Текст] / В.Ф. Сивокобыленко, В.И. Костенко // Электричество. – 1980. – №4. – С.69–71.
3. Соколов, М.М. Электромагнитные переходные процессы в асинхронном электроприводе [Текст] / М.М. Соколов, Л.П. Петров, Л.Б. Масандилов. – М.: Энергия, 1967. – 312 с.

4. Чабан, В.Й. Математичне моделювання електромеханічних процесів [Текст] / В.Й. Чабан. – Львів: В-во держуніверситету „Львівська політехніка”, 1997. – 342 с.
5. Чабан, В. Математична модель вузла живлення асинхронних машин [Текст] / В. Чабан, В. Лишук. – Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2011. – 116 с.

Отримано 12.11.2014